11.1.5 Funkce III (Exponenciální funkce a logaritmy)

Předpoklady:

Př. 1: Nakresli grafy funkcí: a) $y = \left|1 - \log_2(x-2)\right|$ b) $y = 0,5^{|x-1|} + 1$

Př. 2: Urči, pro které hodnoty parametru *a* je funkce $y = \log_{0,1}\left(\frac{a^3 - a}{a-1}\right)^x$ rostoucí?

Př. 3: Zakresli do jednoho obrázku s grafem funkce $y = 2^x$ grafy funkcí:

a) $y = 3^x$, b) $y = \left(\frac{3}{2}\right)^x$ c) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ d) $y = \left(\frac{9}{10}\right)^x$

Př. 4: Nakresli do jednoho obrázku graf funkce $y = \log_2 x$, obrázky dalších logaritmických funkcí s jinými hodnotami základu, tak aby obrázek obsahoval všechny typy a bylo jasné, jak se tvar logaritmu mění s hodnotou základu.

Př. 5: Co mají společného předchozí dva příklady?

Př. 6: K funkci $y = \log_2(x-3) - 1$ najdi funkci inverzní. Urči definiční obor, jak původní tak inverzní funkce,

Př. 7: Urči, pro které hodnoty parametru a protíná graf funkce $y = e^{x+a} - 1$ osu y v bodě $[0,2]$. Graf funkce načrtněte

$a = \ln 3$

Př. 8: Najdi v tabulkách definici logaritmu $y = \log_a x$. Vysvětli omezení pro její definiční obor a obor čísel, která můžeme použít jako základ.

$y = \log_a x$, právě když platí $a^y = x$. Podmínky:

- $a > 0$, a je číslo, které umocňujeme a odmocňujeme $\Rightarrow$ musí být kladné (nezáporné kvůli odmocninám, nenulové kvůli záporným mocninám).
- $x > 0$, x je výsledek umocňování nezáporného čísla.

Př. 9: Urči bez použití kalkulačky hodnoty logaritmů.

a) $\log_2 8$ b) $\log_3 \sqrt{3}$ c) $\log_2 \frac{1}{4}$ d) $\log_4 8$ e) $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{2}$

a) $\log_2 8$

b) $\log_3 \sqrt{3}$ c) $\log_2 \frac{1}{4}$ d) $\log_4 8$ e) $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{2}$

Př. 10: Najdi hodnoty *x* tak, aby platilo:

a) $\log_2 x = 3$ b) $\log_x 4 = -2$ c) $\log_{\sqrt{2}} x = 0,5$

Př. 11: Vyjádři jako jeden logaritmus.

a) $2\log 3 + \log 4 - \log 12$ b) $\ln 3 - \ln \frac{1}{3} - \ln 12 + \ln 8$

Př. 12: Zjednoduš: $2^{\log_2 5} + 3^{\log_3 3} =$.

Př. 13: Urči definiční obor funkce $y = \sqrt{\log\left(\frac{x}{x^2-4}\right) - 1}$.

Př. 14: Rozepiš jako výraz složený z jednoduchých logaritmů.

a) $\log \frac{a^2 b}{3c}$ b) $\ln \sqrt{\frac{a}{b^2 c}}$ c) $\log \frac{(a+b)^3}{4}$

Př. 15: Projdi hodiny 020904-20909 a sestav řešící arzenál pro řešení exponenciálních rovnic a nerovnic (podrobnosti hodina 020904).

Př. 16: Nakresli graf funkce $y = x^{\log_x x}$.

Př. 17: Řeš v R.

a) $4^x \cdot 25^x = 0,01 \cdot \left(10^{3x-1}\right)^2$ b) $\left(\frac{5}{3}\right)^{x+1} \cdot \left(\frac{9}{25}\right)^{x^2+2x-11} = \left(\frac{125}{27}\right)^3$

c) $x^{2x-4} = x^{x^2-3x+2}$ d) $9^{1+\log_3 x} - 3^{1+\log_3 x} - 210 = 0$

e) $\left|\dfrac{\log 2x+1}{2}\right| = 1$ f) $\log_7 2 + \log_{49} x = \log_{\frac{1}{7}} \sqrt{3}$

g) $\log_2\left(4^x+1\right) = x + \log_2\left(2^{x+3}-6\right)$ h) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{x+1} \cdot \left(\dfrac{3}{4}\right)^{x+1} \cdot \left(\dfrac{1}{8}\right)^{x} = \dfrac{1}{96}$

a) $K = \{1\}$ b) K = {-7/2; 2} c) K = {-1;1;2;3} d) K = {5} e) K = {5; 0,0005}

f) K = {1/12} g) K = {0} h) $\left[\dfrac{\log 3 + 4\log 2}{4\log 2}\right]$

Př. 18: Řeš v R

a) $5^x + 3\cdot 5^{x-2} < 140$ b) $\dfrac{1}{1+\log x} + \dfrac{1}{1-\log x} > 2$

c) l) $\log_{\frac{1}{4}}|x+1| > -\dfrac{1}{2}$ d) $3^{1-\frac{2}{x}} - \dfrac{1}{2}\cdot 3^{-\frac{1}{x}} > \dfrac{1}{2}$

e) $(2x^2-3x-2)\cdot\log(x+1) > 0$

a) $K = (-\infty;1)\cup(2;+\infty)$ b) $K = (1/10;1)\cup(1;10)$ c) $K = (-3;-1)\cup(-1;1)$

d) $\left[\left(-\infty;\dfrac{\log 3}{\log 2}\right)\right]$ e) $\left[(-\dfrac{1}{2},0)\cup(2,\infty)\right]$

Př. 19: Vyznač v soustavě souřadnic množinu všech bodů, pro které platí: $y > \log x$, $y < 4^x$, $x \le 1$, $y > -x-2$.

Shrnutí: